



MINISTERUL  
EDUCAȚIEI ȘI  
CERCETĂRII



## Clasa a XII-a

### SUBIECTUL I

Considerăm  $k \in \mathbb{N}^*$  și  $G = (k, \infty)$ . Pe mulțimea  $G$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = xy - kx - ky + k^2 + k, \forall x, y \in G$ . Admitem că  $(G, \circ)$  este grup abelian.

- Determinați elementele  $x \in G$  care au proprietatea că sunt egale cu simetricele lor.
- Arătați că dacă  $H$  este un subgrup al grupului  $(G, \circ)$  cu proprietatea că  $H$  conține toate numerele naturale mai mari sau egale decât  $k + 1$ , atunci  $H$  conține toate numerele raționale mai mari decât  $k$ .

### SUBIECTUL al II-lea

Să se calculeze:  $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(e^x + 1)(\sin^2 x + 1)} dx$ .

### SUBIECTUL al III-lea

Fie  $0 < a < b$  și  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  două funcții derivabile, cu derivatele continue. Știind că

$$\int_a^b 2xf(x)dx = a^2g(a) - b^2g(b) \text{ și } \int_a^b 2xg(x)dx = a^2f(a) - b^2f(b),$$

Arătați că există  $c \in (a, b)$ , astfel încât  $f'(c) = g'(c)$ .

Dan Dumitrescu, București

Gazeta Matematică

### SUBIECTUL al IV-lea

Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $e$  elementul său neutru. Dacă elementele  $a, b \in G$  verifică relațiile  $ab = b^4a$  și  $b^6 = e$ , arătați că  $ab = ba$ .



## Soluții și barem

### Clasa a XII-a

#### SUBIECTUL I (21p)

- a)  $x \circ e = x, \forall x \in G \Rightarrow (x - k)(e - k) = x - k \Rightarrow e = k + 1$ . .....3p  
 $x \circ x' = e$  și  $x = x' \Rightarrow x \circ x = e$ .....3p  
 Prin calcul,  $x = k + 1 \in G$  sau  $x = k - 1 \notin G$ .....3p
- b) Fie  $q \in H, q > k \Rightarrow q = k + \frac{m}{n}, m, n \in N^*$  .....3p  
 $m, n \in N^* \Rightarrow x = k + m \in H$  și  $y = k + n \in H$ . Dar  $H$  este subgrup  $\Rightarrow x \circ y' \in H$ .....3p  
 $y \circ y' = e \Rightarrow (y - k)(y' - k) + k = 1 + k \Rightarrow y' = \frac{1}{y - k} + k$ . .....3p  
 $x \circ y' = m \cdot \frac{1}{n} + k = q \in H$ . .....3p

#### SUBIECTUL al II-lea (21p)

Notăm  $x = -t, dx = -dt, x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$  și  $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2}$  .....6p

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(-t)}{(e^{-t}+1)(\sin^2(-t)+1)} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^t \cos t}{(e^t+1)(\sin^2 t+1)} dt = J$$
 .....9p
$$I + J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin^2 x+1)} dx = \arctg\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) - \arctg\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$
 .....6p

#### SUBIECTUL al III-lea (21p)

Folosind metoda integrării prin părți,

$$\int_a^b 2xf(x)dx = \int_a^b (x^2)'f(x)dx = b^2f(b) - a^2f(a) - \int_a^b x^2f'(x)dx$$
 .....3p

$$\int_a^b 2xg(x)dx = \int_a^b (x^2)'g(x)dx = b^2g(b) - a^2g(a) - \int_a^b x^2g'(x)dx$$
 .....3p

Atunci, ținând cont de relațiile din enunț, avem

$$a^2g(a) - b^2g(b) = b^2f(b) - a^2f(a) - \int_a^b x^2f'(x)dx$$
 .....3p

$$a^2f(a) - b^2f(b) = b^2g(b) - a^2g(a) - \int_a^b x^2g'(x)dx$$
 .....3p

Scădem prima dintre cele două relații de mai sus, din cea de-a doua, obținând



**MINISTERUL  
EDUCAȚIEI ȘI  
CERCETĂRII**



$$\int_a^b x^2 (f'(x) - g'(x)) dx = 0, \dots\dots\dots 3p$$

Integrandul fiind o funcție continuă, putem aplica teorema de medie: există  $c \in (a, b)$  astfel încât

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 (f'(x) - g'(x)) dx = c^2 (f'(c) - g'(c)), \text{ deci } c^2 (f'(c) - g'(c)) = 0, \dots\dots\dots 3p$$

Cum  $0 < a < b, c \in (a, b)$ , deducem că  $c \neq 0$ , prin urmare  $f'(c) = g'(c)$ .  
 $\dots\dots\dots 3p$

**SUBIECTUL al IV-lea (21p)**

Înmulțim relația  $ab = b^4 a$ , la stânga, cu  $a^4$  și, cum  $b^6 = e$ , obținem  $b^4 ab = b^2 a$  ..... 3p

Înlocuim  $b^4 a$  cu  $ab$ , rezultă  $ab^2 = b^2 a$ ..... 6p

Atunci  $ab = b^4 a = b^2 b^2 a = b^2 ab^2 = ab^4$ , de unde  $b^3 = e$ ..... 6p

Înlocuim în relația inițială, obținând  $ab = ba$ ..... 6p